Rotational Geometry - Γεωμετρία των Στροφών

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία, αν για κάθε 2 διανύσματα $x,y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $|f(x)-f(y)| = |x-y|$

ΛΗΜΜΑ 1

Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση που "φιξάρει" την αρχή των αξόνων. Αν f ισομετρία, τότε η f διατηρεί τα μήκη των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$. Το αντίστροφο ισχύει αν f γραμμ. μετασχηματισμός.

Αποδειξη

Αφού $\exists$ ισομετρία $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ $|f(x)-f(y)| = |x-y|$ με $f(0)=0$.
και $|f(x)| = |f(x)-f(0)| = |x-0| = |x|$

Έστω, τώρα, ότι η f διατηρεί τα μήκη. Δοθέντος 2 x,y και αν f γραμμ. έχω $|f(x)-f(y)| = |f(x-y)| = |x-y|$. Άρα f ισομετρία.

ΛΗΜΜΑ

Αν f,g ισομετρίες, τότε $f\circ g$ ισομετρία και μάλιστα, αν f,g γραμμικές, τότε $f\circ g$ γραμμική.

Αποδειξη

Οδο $f\circ g$ ισομετρία. Έστω $|f(g(x)) - f(g(y))| = |g(x)-g(y)| = |x-y|$
Άρα $f\circ g$ είναι ισομετρία.
Αν f,g γραμμ. $f(g(0)) = f(0) = 0$. Άρα $f\circ g$ γραμμική

ΛΗΜΜΑ

Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που κινεί την αρχή των αξόνων. Τότε η $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $g(x) = f(x) - f(0)$ είναι γραμμική. ~~Έστω~~

Αποδειξη

Εστω $x,y \in \mathbb{R}^n$. Τότε $|g(x)-g(y)| = |f(x)-f(0)-f(y)+f(0)| = |f(x)-f(y)| = |x-y|$

Για γραμμικοτητα: $g(0)=f(0)-f(0)=0$. Αρα g γραμμικη.

Θεωρημα

Η $(O(n), \cdot)$ ειναι ομαδα.

$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t = I\}$

Αποδειξη

$I \in O(n)$

$A^t = A^{-1}$ καθε στοιχειο εχει αντιστροφο

πολ/μος προσεταιριστικος

κλειστοτητα: Εστω $A, B \in O(n)$

Θδο $(AB)(AB)^t = ABB^tA^t = AA^t = I \Rightarrow AB \in O(n)$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Εφοσον $AA^t = I$, αν θεωρησω τις στηλες του A να ειναι διανυσμα, αυτα ειναι ορθοκανονικα.

Λημμα

Τα στοιχεια της $O(n)$ διατηρουν το εσωτερικο γινομενο.

Αποδειξη

Αν θεωρησω τα διανυσματα του $\mathbb{R}^n$ να ειναι πινακες στηλη, το $u \cdot v$ μπορει να γραφτει $u \cdot v = u^t v$. Εστω $A \in O(n)$.

Τοτε $(Au)(Av) = (Au)^t(Av) = u^tA^tAv = u^tv = uv$.

Αρα τα στοιχεια της $O(n)$ διατηρουν το εσωτ. γινομενο.

Λημμα.

Τα στοιχεια της $O(n)$ ειναι γραμμικες ισομετριες

Αποδειξη

Εστω $A \in O(n)$. Ο A διατηρει το εσωτ. γινομενο, δηλ. διατη-

ρεί τα μήκη (αν $v \in \mathbb{R}^n$: $|v| = \sqrt{v^2}$.
Επίσης, ο A "φιξάρει" την αρχή των αξόνων και ισχύει $A \cdot O = O$.
Από προηγούμενο λήμμα 1. έχω ότι είναι γραμμική.

Πρόταση

Κάθε γραμμική ισομ. είναι γραμμ. μετασχηματισμός με πίνακα να ανήκει στην $O(n)$

Απόδειξη

Α.ν.δ.ο. $\forall$ γραμ. ισομ. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\exists$ $n \times n$ πίνακας A: $f(x) = Ax$

Τότε η f θα είναι γραμ. μετασχηματισμός.

Κατασκευάζω έναν τέτοιο πίνακα.

Θεωρώ της n-οστή στήλης του πίνακα να δίνονται από το $f(e_i)$
Καθώς η f διατηρεί το εσωτ. γινόμενο, οι στήλες του A είναι ορθοκανονικές. Άρα $A \in O(n)$.

Θ.δ.ο. $f = A$ δείχνοντας ότι η $g = A^{-1} \circ f$ να είναι η ταυτοτική, g ισομετρία και $g(0) = 0$. Άρα η g διατηρεί τα μήκη και το εσωτερικό γινόμενο. $g(e_i) = e_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.
Άρα $\forall x \in \mathbb{R}^n$ έχω $g(x) = \sum_{i=1}^{n} [g(x) e_i] e_i = \sum_{i=1}^{n} [g(x) g(e_i)] e_i = \sum_{i=1}^{n} [x e_i] e_i = x$. Άρα $f = A$, f γραμμικός μετασχηματισμός.

Θεώρημα

$SO(n) \leq O(n)$, με $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = +1\}$.

- SO(2) Γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία της SO(2)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

→ Αβελιανή (πράξεις $AB = BA$) $\begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$

• SO(3) $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

προφανώς, $A, B \in SO(3)$

SO(3) όχι αβελιανή

Ορισμός

Ιδιοτιμές ενός πίνακα A, nxn είναι όλα τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία, $\exists\, \vec{r} \neq 0$, $A\vec{r}=\lambda\vec{r}$. Το r καλείται ιδιοδιάνυσμα. Το σύνολο όλων των r, αποτελούν τον ιδιοχώρο της λ.

Θεώρημα

Έστω $A \in SO(n)$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A.

1) $\det A = 1 = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$

2) Αν λ ρίζα, $\bar{\lambda}$ ρίζα

3) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $|\lambda| = 1$

Ιδιότητες SO(2)

Έχω 2 ρίζες. $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$.

$\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$ Για $\theta = \{0, \pi\}$ έχω πραγματικές ρίζες

λ		θ
1	1	0
-1	-1	π
ω	$\bar{\omega}$ (1g)	$\theta \neq 0, \pi$

Υπολογίζω τον ιδιοχώρο για τις πραγματικές τιμές.

$\theta = 0$ Ο πίνακας στροφής είναι ο $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

κάθε διάνυσμα $r \in \mathbb{R}^2$, $Ir = r$. Ο ιδιοχώρος για $\lambda = 1$ είναι όλο το $\mathbb{R}^2$

$\theta = \pi$: Ο πίνακας στροφής είναι ο $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
και όλος ο $\mathbb{R}^2$ ο ιδιόχωρος

Ιδιοτιμές SO(3)

Όπως προηγουμένως με την ίδια διαδικασία βρίσκω

1) $\theta = 0$ $\lambda = 1, 1, 1$
2) $\theta = \pi$ $\lambda = 1, -1, -1$
3) $\theta \neq 0, \pi$ $\lambda = 1, \omega, \bar{\omega}$ (ω μιγαδικός)

Για το 1) I πίνακας στροφής, όλος ο $\mathbb{R}^3$ ο ιδιόχωρος

Για το 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, εφόσον είναι διαγώνιος έχει ιδιοτιμές: $1, -1, -1$

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ένας άξονας) (αφήνει μια γραμμή αμετάβλητη)

$\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (επίπεδο)

3) $\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (γιατί αφήνει μια γραμμή αμετάβλητη) (Δεν υπολογίζω για τους μιγαδικούς)

Θεώρημα (Euler)
Αν $A \in SO(3)$ και $A \neq I$ τότε ο A έχει έναν μονοδιάστατο ιδιόχωρο (τον οποίο θα ονομάσουμε άξονα περιστροφής)

Ιδιοτιμές SO(4)
1) $\lambda = 1, 1, 1, 1 \rightarrow \theta = 0, 0$, πίνακας στροφής I, ιδιόχωρος $\mathbb{R}^4$
2) $\lambda = -1, -1, -1, -1 \rightarrow \theta = \pi, \pi$, πίνακας στροφής $-I$, -»- $\mathbb{R}^4$

3) $\lambda = 1, 1, -1, -1 \to \theta = 0, \pi$
4) $\lambda = 1, 1, \omega, \bar{\omega} \to \theta = 0, \theta$
5) $\lambda = -1, -1, \omega, \bar{\omega} \to \theta = \pi, \theta$
6) $\lambda = \omega, \bar{\omega}, z, \bar{z} \to \theta = \theta, \varphi$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in SO(4)$.

$(I-(A(0))$, $(-I-A(0))$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1 x_2$ επιπεδο $\quad$ $x_3 x_4$ επιπεδο.

Αν δω τι κανει ενα τυχαιο διανυσμα

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $x_1 x_2 \div 0$ (το στρέφει κατα γωνια 0)
$x_3 x_4 \div \pi$ (το στρέφει κατα γωνια π)

4) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Ειναι ειδικη περιπτωση). $\in SO(4)$

Ιδιοτιμες: $\lambda = 1$ με πολ/τα 2
$\lambda = \pm i$

για $\lambda=1$ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ επίπεδο x_1x_2

Για τυχαίο διάνυσμα $B = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\-x_4\\x_3\end{pmatrix}$ $x_1x_2 \div 0$ $x_3x_4 \div \pi/2$.

5) $B = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \in SO(4)$ $\lambda=-1$ πολ/τα 2
$\lambda = \pm i$

για τυχαίο διάνυσμα $B = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\\-x_4\\-x_3\end{pmatrix}$ $x_1x_2 : \pi$ $x_3x_4 : \pi/2$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε στοιχείο της SO(3) μπορεί να γραφεί σαν σύνθεση στροφών των επιπέδων που γεννιούνται από τα διανύσματα βάσης του ~~$\mathbb{R}^3$~~ $\mathbb{R}^3$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$R_z = \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad R_x = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix}\cos\theta_3 & 0 & -\sin\theta_3\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3\end{pmatrix}$$

Οι παραπάνω πίνακες, είναι πίνακες στροφής.

Ενα μοναδιαίο διάνυσμα σ' αυτόν τον ιδιοχώρο παραμετρικοποιείται ως εξής:

$n = (\cos a \sin b, \sin a \sin b, \cos b)$

Ευθυγραμμίζω τον άξονα περιστροφής με τον z άξονα, ως

$$R_y(b) R_z(a)^t n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Τώρα μπορώ να γράψω κάθε στοιχείο της SO(3) σαν

$R_z(a) R_y(b)^t R_z(\theta) R_y(b) R_z(a)^t$

Άρα έδειξα πως μπορώ να γράψω κάθε στοιχείο της SO(3) σαν γινόμενο στροφών των επιπέδων που γεννιούνται από τις συνήθεις βάσεις του $\mathbb{R}^3$

ΘΕΩΡΗΜΑ

$\forall A \in SO(3)$ οι ρίζες του χ.π. είναι το 1, $\cos\theta \pm i \sin\theta$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\forall A \in SO(4)$ μπορεί να γραφτεί σαν σύνθεση στροφών των επιπέδων που γεννιούνται από τα διαν/τα βάσης του $\mathbb{R}^4$.

ΑΜΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΛΗΜΜΑ

S^1 αβελιανή, με $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

$S^1 \cong SO(2)$

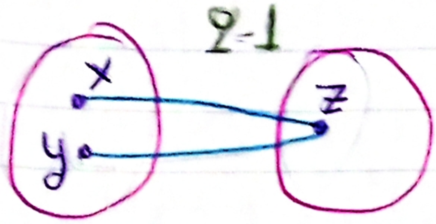
ΛΗΜΜΑ

S^3 όχι αβελιανή ομάδα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ([illegible])

$\exists$ ένας "2-1" και επί ομομορφισμός από την S^3 στην $SO(3)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



· Έστω $n = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, με $|n| = 1$. Θεωρώ ένα μοναδιαίο κουαρτένιο να δίνεται ως εξής: $q = \cos\varphi + n\sin\varphi$

Έστω $r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Γράφω το r στον $\mathbb{R}^4$ $r = (0, x, y, z)$

Επειδή ο $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ μπορώ να γράψω το $r = xi + yj + zk$.

Αν πολλ/σω το r με ένα μοναδιαίο quartenium, έχω ότι $|qr| = |r|$

· Όμως δεν βγαίνει κάτι, γιατί το qr θα μου δίνει μια μη μηδενική πραγματική συνιστώσα. Θέλω να μην έχει κάποια πραγματική συνιστώσα.

Δοκιμάζω το $qr\bar{q}$

$(\cos\varphi + n\sin\varphi) r (\cos\varphi - n\sin\varphi)$

Υπολογίζοντας το $qr\bar{q}$, καθώς το r κινείται στα διαν/τα βάσης

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi (a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) & -2\cos\varphi\sin\varphi a_3 + 2\sin^2\varphi a_1 a_2 & 2\cos\varphi\sin\varphi a_2 + 2\sin^2\varphi a_1 a_3 \\ 2\cos\varphi\sin\varphi a_3 + 2\sin^2\varphi a_1 a_2 & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi (a_2^2 - a_1^2 - a_3^2) & -2\cos\varphi\sin\varphi a_1 + 2\sin^2\varphi a_2 a_3 \\ -2\cos\varphi\sin\varphi a_2 + 2\sin^2\varphi a_1 a_2 & 2\cos\varphi\sin\varphi a_1 + 2\sin^2\varphi a_2 a_3 & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi (a_2^2 - a_3^2 - a_1^2) \end{pmatrix}$$

Δοθέντος ενός μοναδιαίου ~~καρτεσιανού~~ quartenium κατασκευάζω τον μετασχηματισμό f_q του $\mathbb{R}^3$ ως εξής: $f_q(r) = qr\bar{q}$, $f_q \in SO(3)$

Θεωρώ την απεικόνιση $f : S^3 \to SO(3)$ ως $f(q) \to f_q$.

· Έστω $q_1, q_2 \in S^3$ $f(q_1 q_2)(r) = q_1 q_2 r \overline{q_1 q_2} = q_1 q_2 r (\bar{q_2} \bar{q_1}) =$

$q_1 (q_2 r \bar{q_2}) \bar{q_1} = f(q_1)(q_2 r \bar{q_2}) = (f(q_1) f(q_2))(r)$

Για το επί: Στον A: $a_1 = 1$, $a_2 = 0 = a_3$, ...

Εφόσον μπορώ να κατασκευάσω στροφές κατά ένα διάνυσμα βάσης χρησιμοποιώντας quarternium, ο ομομορφισμός είναι επί.

Θ.δ.ο. είναι "2-1" η f.

f_1, f_{-1} είναι οι ταυτοτικοί.

Ισχυρίζομαι ότι ο πυρήνας έχει δύο στοιχεία, τα ± 1.

Έστω $q \in \ker f$. Τότε f_q ταυτοτική. Τότε $q r \bar{q} = r$ $\forall r = xi + yj + zk$. Άρα $qr = rq$.

Τα μόνα όμως χαλβιτόνια που αντιμετατίθενται είναι οι πραγματικοί. Άρα $q \in \mathbb{R}$, επειδή $|q| = 1 \Rightarrow q = \pm 1$.

Άρα f "2-1"

ΘΕΩΡΗΜΑ

Υπάρχει "2-1" και επί ομοιομορφισμός: $f: S^3 \times S^3 \to SO(4)$